Rozszerzenia symboliczne

Tomasz Downarowicz
Instytut Matematyki i Informatyki
Politechnika Wrocławska

1 Wstęp

W dzisiejszych czasach prawie każda informacja zapisywana jest (i przekazywana) w formie cyfrowej. Aparaty cyfrowe zamieniają obrazy na pliki komputerowe. To samo dotyczy filmów czy nagrań muzycznych. Prognozy pogody przygotowywane są przez zawiłe systemy, które muszą otrzymać na wejściu dane cyfrowe. Czarne skrzynki rejestrujące przebieg lotu samolotów czy przejazdu innych środków lokomocji również czynią to w formie cyfrowej. Nawet nasze artykuły naukowe zapisywane są głównie w postaci plików, a część czasopism powoli wycofuje się z drukowania prac na papierze. Analogowa forma zapisu informacji jest na wymarciu.

Badając układy dynamiczne (w każdym rozumieniu tego pojęcia) prędzej czy później zostaniemy postawieni przed pytaniem: Czy i jak można najlepiej (najoszczędniej i bezstratnie) w formie cyfrowej zapisywać informację o ewolucji układu dynamicznego? Specjaliści z dziedziny układów dynamicznych są odpowiedzialni za dostarczenie podstaw teoretycznych do udzielenia odpowiedzi na to pytanie.

A więc wyobraźmy sobie, że faktycznie obserwujemy jakiś układ dynamiczny, i że rzeczywiście zapisujemy informację o jego ewolucji w formie cyfrowej. Oznacza to, że co jakiś czas (być może w odstępach lat, a może ułamków sekund – nie jest to teraz istotne) produkujemy cyfrowy „raport" – plik komputerowy – zawierający nasze obserwacje poczynione od poprzedniego raportu. Dla uproszczenia przyjmijmy, że raporty te produkowane są w jednakowych odstępach czasu – co jednostkę czasu. Z uwagi na ograniczone możliwości sprzętowe, nasze raporty będą miały wspólnie ograniczoną objętość (np. liczoną w kilobajtach). Ponieważ plików o ograniczonej objętości jest skończenie wiele, możemy powiedzieć, że każdy taki raport stanowi tylko jeden „symbol" z alfabetu, którym jest zbiór wszystkich (skończenie wielu) plików zadanej objętości.

Dobrym przykładem jest tu filmowanie jakiejś sceny przy pomocy kamery cyfrowej. W każdej jednostce czasu (w tym wypadku są to ułamki sekund) kamera rejestruje obraz w postaci bitmapy o objętości określonej przez rozdzielczość kamery. Żywa scena zapisana jest w postaci ciągu „symboli" z alfabetu, jakim jest zbiór bitmap o danej rozdzielczości.

Ciąg symboli produkowany jest tak długo, jak długo trwa obserwacja i w przypadku teoretycznym możemy przyjąć, że trwa ona w nieskończoność. Czasami w rozważaniach teoretycznych przyjmuje się (choć nie jest to konieczne), że obserwacja twa w czasie od minus do plus nieskończoności. Tak oto historia naszych obserwacji układu dynamicznego przekształcona zostaje w ciąg (jednostronnie lub dwustronnie nieskończony) symboli z alfabetu skończonego Λ. Ciąg ten będziemy numerować od zera, zawsze uznając aktualny symbol za zerowy, a wcześniej wyprodukowane symbole jako minus pierwszy, minus drugi, itd., natomiast niewyprodukowane jeszcze *przyszłe* symbole, jako pierwszy, drugi, itd. Upłynięcie jednostki czasu odpowiada, od strony układu dynamicznego, jego ewolucji w czasie jednostkowym, a od strony naszego ciągu symbolicznego, przesunięciu numeracji (numer każdego symbolu zmniejszy się o jeden). W ten oto sposób dochodzimy do wniosku, że forma cyfrowa zapisu obserwacji układu dynamicznego jest niczym innym jak elementem tzw. przestrzeni symbolicznej $\Lambda^{\mathbb{S}}$, gdzie $\mathbb{S}$ oznacza albo zbiór $\mathbb{Z}$ wszystkich liczb całkowitych (dla ciągów dwustronnych) lub tylko liczb całkowitych nieujemnych $\mathbb{N}_0$ (dla ciągów jednostronnych). Transformacją na tej przestrzeni jest dobrze znane specjalistom *przeusnięcie w lewo* (ang. *shift*) $\sigma(x) = y$, gdzie dla $x = (x_n) \in \Lambda^{\mathbb{S}}$ mamy $y = (y_n) = (x_{n+1})$.

Niestety, w większości przypadków występujących w praktyce taki zapis cyfrowy będzie „stratny", tzn. nie będzie wychwytywał pełnej informacji o układzie. Część (przeważnie bardzo duża) danych nie będzie rejestrowana. Na przykład kamera nie zarejestruje obiektów schowanych za innymi obiektami, nie wykryje ruchu cząsteczek mniejszych niż jeden piksel (chyba, że przejdą one z jednego piksla do drugiego). Niemniej jednak okazuje się, że jest możliwe, iż po jakimś czasie, na podstawie analizy zarejestrowanych obrazów będzie można odtworzyć ruch niektórych (a może nawet wszystkich) niewidocznych lub małych cząstek.

Rzecz jasna, stratny zapis cyfrowy jest zawsze możliwy, zatem przedstawia mniejsze wyzwanie dla teoretyków. Prawdziwym wyzwaniem jest pytanie czy i kiedy istnieje taki zapis *bezstratny*. Chodzi o to, aby analizując cały nieskończony ciąg symboli można było precyzyjnie odtworzyć ruch wszystkich elementów (punktów) układu. Będzie tak na przykład wtedy, gdy obserwowany układ jest mało skomplikowany: składa się ze skończenie wielu sztywnych brył poruszających się w taki sposób, że w chwilach całkowitych każda z nich ma do wyboru tylko skończenie wiele możliwych położeń. Układ taki nazwiemy *dyskretnym*. Ale czy jedynie tak prymitywne układy pozwalają się bezstratnie zapisać cyfrowo?

Okazuje się, że nie tylko i tu właśnie zaczyna się ciekawa strona tego problemu. Dodatkowo, zagadnienie to można rozpatrywać na co najmniej dwóch poziomach: teorio-miarowym i topologicznym. W pierwszym przypadku interesuje nas tylko struktura *miarowa* układu. Nie wprowadzamy w przestrzeni układu żadnej metryki ani nawet topologii. Jedyne co widzimy, to rozbicia na zbiory mierzalne, a wszelkie zjawiska występujące z prawdopodobieństwem zerowym – ignorujemy. Takim podejściem do układów dynamicznych zajmuje się *teoria ergodyczna*. Przy podejściu topologicznym interesują nas pokrycia otwarte. Zauważamy, które punkty zbliżają się do siebie na dowolnie małą odległość, a które nie. Nie ignorujemy orbit *żadnych* punktów. Takie podejście reprezentuje *dynamika topologiczna.*

W ujęciu teorio-miarowym pytanie o charakteryzację układów dopuszczającą bezstratny zapis cyfrowy jest stosunkowo łatwy i jego rozwiązanie znane jest od kilkudziesięciu lat. Dla automorfizmów (transformacji odwracalnych) odpowiedzi dostarcza znane twierdzenie Kriegera o generatorach: automorfizm T przestrzeni probabilistycznej $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ jest izomorficzny z układem symbolicznym wtedy i tylko wtedy gdy ma skończoną entropię $h_\mu(T)$. Liczba symboli, jaka wystarcza do zakodowania układu, wynosi wtedy $\lfloor \exp h_\mu(T) \rfloor + 1$ (gdzie $\lfloor \cdot \rfloor$ oznacza zaokrąglenie całkowite w dół). Dla endomorfizmów (transformacji nieodwracalnych) sytuacja jest odrobinę bardziej skomplikowana. Są przykłady endomorfizmów o entropii skończonej, które nie są *izomorficzne* z żadnym układem symbolicznym. Jednak zawsze można taki układ przedstawić jako *faktor* układu symbolicznego. Trzeba najpierw wziąć tzw. *rozszerzenie naturalne* endomorfizmu. Jest to automorfizm (określony na nieco większej przestrzeni), o takiej samej entropii, którego oryginalny endomorfizm jest faktorem. Wiemy już, że automorfizm ten jest izomorficzny z układem symbolicznym, zatem nasz endomorfizm jest faktorem układu symbolicznego. Zapis cyfrowy układu poprzez zanurzenie go – jako faktora – w układzie symbolicznym będziemy nazywać *rozszerzeniem symbolicznym.* Jest to rozwiązanie z punktu widzenia teoretycznego prawie tak samo dobre jak izomorfizm, gdyż rozszerzenie *jest* bezstratną formą zapisania informacji o układzie w postaci cyfrowej. Co prawda rozszerzenie zawiera również opis jakiegoś innego „dodatkowego" (i niepotrzebnego nam) układu, ale to w końcu nam aż tak bardzo nie przeszkadza. W omówionym przypadku rozszerzenie to ma taką samą entropię, co oznacza, że nie niesie nadmiaru zawartości informacyjnej.

W ujęciu topologicznym sytuacja staje się naprawdę subtelna i wymaga zupełnie innego podejścia oraz rozbudowanych narzędzi teoretycznych. Poszukiwanie podstaw teoretycznych bezstratnego zapisu cyfrowego doprowadziło do powstania nowych pojęć i w zasadzie całej nowej „podteorii" w obrębie teorii entropii. Tym razem poszukujemy reprezentacji cyfrowej zachowującej strukturę topologiczną (a nie tylko miarową) oryginalnego układu, a więc powiązanego z nim przekształceniem ciągłym. Szanse na znalezienie reprezentacji topologicznie sprzężonej (co byłoby odpowiednikiem izomorfizmu) są niewielkie. Układy symboliczne są zero-wymiarowe i ekspansywne i te dwie cechy są niezmiennikami sprzężenia topologicznego. Tak więc żaden układ, który nie jest zero-wymiarowy albo ekspansywny (a takich jest większość) nie może być zapisany cyfrowo w sposób topologicznie sprzężony. Pozostaje tylko możliwość znajdowania *rozszerzeń symbolicznych.* Tym razem jednak mają to być rozszerzenia topologiczne, a więc takie, że odwzorowanie faktorujące na układ wyjściowy jest ciągłe. Ani zero-wymiarowość ani ekspansywność nie stoją na przeszkodzie, aby układ symboliczny był rozszerzeniem układu, który własności tych nie posiada. Rzecz jasna, podobnie jak w przypadku miarowym, układ o nieskończonej entropii topologicznej nie może mieć rozszerzenia symbolicznego, gdyż te mają entropię skończoną. Niestety, nie jest tu już tak dobrze jak w sytuacji teorio-miarowej. Skończona entropia (tym razem topologiczna) nie gwarantuje istnienia rozszerzenia symbolicznego. Okazuje się też, że istnieją układy o skończonej entropii (powiedzmy h), takie że co prawda istnieją jego rozszerzenia symboliczne, ale każde z nich entropię co najmniej h', gdzie h' jest pewną liczbą ostro większą od h (h' może być dowolnie dużo większe od h). Pojawia się zatem nowy parametr zwany *topologiczną entropią rozszerzeniową symboliczną* zdefiniowany jako infimum entropii topologicznych wszelkich rozszerzeń symbolicznych danego układu. Jeśli ten parametr jest skończony, to układ ma rozszerzenie symboliczne, w przeciwnym razie go nie posiada.

W ten sposób doszliśmy do dwóch głównych pytań teorii topologicznych rozszerzeń symbolicznych. Dany jest dynamiczny układ topologiczny (X, T).

- Czy istnieje rozszerzenie symboliczne (Y, σ) układu (X, T)?
- Jeśli tak, to jaka jest najmniejsza możliwa entropia topologiczna takiego rozszerzenia?

Można te dwa pytania zawrzeć w jednym:

- Jak, wyliczyć topologiczną entropię rozszerzeniową symboliczną danego układu (X, T)?

W kolejnych rozdziałach przedstwimy w wielkim skrócie, jak można udzielić odpowiedzi na to pytanie. Ze względu na szkicowy charakter tego artykułu zaniedbamy przytaczanie każdorazowo źródeł, z których pochodzą kolejne definicje i twierdzenia. Większość z nich wywodzi się z pracy [2], jak również [3], [11], [13] i [12]. Czytelnik znajdzie je również w książce [9], gdzie zostały one zebrane, zoptymalizowane i opracowane w ujednoliconym systemie oznaczeń. Również w rozdziale ostatnim, dotyczącym historii badań, podano – w przypadku wielu ważnych dla omawianej teorii odkryć – odnośniki do oryginalnej literatury.

2 Podstawowe pojęcia

Okazuje się, że aby rozwiązać powyższy problem (choćby teoretycznie), nie wystarczy badać topologicznych własności układu. Trzeba badać zachowanie się entropii teorio-miarowej wszystkich miar niezmienniczych tego układu. To właśnie doprowadziło do powstania nowej podteorii – teorii struktur entropijnych w układach topologicznych.

Podamy teraz kilka kluczowych pojęć teorii rozszerzeń symbolicznych i struktur entropijnych pozwalających przynajmniej sformułować pytania, na jakie odpowiada ta teoria. Zakładamy, że czytelnik wie, co to jest topologiczny układ dynamiczny (X, T) zadany przez pojedyncze odwzorowanie T na przestrzeni zwartej X i co to jest teorio-miarowy układ dynamiczny $(X, \mathfrak{F}, \mu, T)$ na przestrzeni probabilistycznej $(X, \mathfrak{F}, \mu)$, zna pojęcia faktora topologicznego i teorio-miarowego, wreszcie orientuje się w teorii entropii miarowej $h_\mu(T)$ oraz entropii topologicznej $\mathbf{h}_{\mathsf{top}}(X, T)$ przynajmniej na tyle, że potrafi sformułować zasadę wariacyjną dla tych entropii.

Zgodnie z wcześniejszym opisem, pojęciem dla nas fundamentalnym jest *topologiczna entropia rozszerzeniowa symboliczna*

Definicja 2.1.

$$\mathbf{h}_{\mathsf{sex}}(X,T) = \inf\{\mathbf{h}_{\mathsf{top}}(Y,\sigma) : \ (Y,\sigma) \textit{ jest rozszerzeniem symbolicznym } (X,T)\}.$$

Przyjmując, że infimum zbioru pustego wynosi $+\infty$ otrzymujemy, że

$$\mathbf{h}_{\mathsf{sex}}(X,T) = \infty \iff (X,T) \text{ nie posiada rozszerzeń symbolicznych.}$$

Jak już wspomniano, to „zgrubne” topologiczne pojęcie nie pozwala się badać bez uwzględnienia tego, co dzieje się z entropią wszystkich miar niezmienniczych układu (X,T). Dlatego potrzebne jest wprowadzenie dalszych, o wiele subtelniejszych pojęć. Po pierwsze musimy uchwycić funkcję wyliczającą entropię miary w rozszerzeniu. Najpierw oznaczenia: przez $\mathcal{M}_T(X)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich (probabilistycznych borelowskich) miar T-niezmienniczych na X, podobnie $\mathcal{M}_\sigma(Y)$ oznaczać będzie zbiór wszystkich miar σ-niezmienniczych na Y. Jeśli $\pi : Y \to X$ jest odwzorowaniem faktorującym układ (Y,σ) na (X,T) to indukuje ono odwzorowanie (również oznaczane przez nas literą π) przekształcające $\mathcal{M}_\sigma(Y)$ na $\mathcal{M}_T(X)$. Odbywa się to według zasady $\pi(\nu) = \mu$, gdzie $\nu \in \mathcal{M}_\sigma(Y)$, a $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$ jest zadana wzorem

$$\pi(\nu)(A) = \nu(\pi^{-1}(A))$$

(tutaj A oznacza zbiór mierzalny w X). Mając te oznaczenia możemy na $\mathcal{M}_T(X)$ zdefiniować *funkcję entropii rozszerzeniowej* dla rozszerzenia π, wzorem

$$h^\pi(\mu) = \sup\{h_\nu(S) : \nu \in \mathcal{M}_\sigma(Y), \pi(\nu) = \mu\}.$$

Funkcja ta określa maksymalną entropię miary rozszerzającej miarę μ. I wreszcie możemy określić (nadal na $\mathcal{M}_T(X)$) nasze najważniejsze pojęcie, tzw. *funkcję entropii rozszerzeniowej symbolicznej.*

Definicja 2.2.

$$h_{\mathsf{sex}}(\mu) = \inf\{h^\pi(\mu) : \ \pi : Y \to X \textit{ jest rozszerzeniem symbolicznym}\}.$$

Znowu przyjmując, że infimum zbioru pustego wynosi $+\infty$ otrzymujemy, że $h_{\mathsf{sex}}(\mu) = \infty$ dla jednej miary niezmienniczej μ na X wtedy i tylko wtedy, gdy $h_{\mathsf{sex}}(\mu) = \infty$ dla wszystkich takich miar, wtedy i tylko wtedy, gdy (X,T) nie posiada rozszerzeń symbolicznych.

Jednym z twierdzeń leżących u podstaw teorii entropii rozszerzeń symbolicznych jest poniższa zasada wariacyjna:

Twierdzenie 2.3 (Zasada wariacyjna dla entropii rozszerzeniowej symbolicznej)**.**

$$\mathbf{h}_{\mathsf{sex}}(X,T) = \sup\{h_{\mathsf{sex}}(\mu) : \mu \in \mathcal{M}_T(X)\}.$$

Tym więc sposobem podstawowe pytanie o topologiczną entropię rozszerzeniową symboliczną można zastąpić bardziej subtelnym pytaniem:

- Jak, wyliczyć funkcję entropii rozszerzeniowej symbolicznej na miarach niezmienniczych danego układu (X, T)?

Jeśli będziemy potrafili obliczyć tę funkcję, to automatycznie będziemy mieli wyliczoną topologiczną entropię rozszerzeniową symboliczną – jako supremum tej funkcji.

Znalezienie funkcji $\mu \mapsto h_{\mathsf{sex}}(\mu)$ na miarach niezmienniczych układu jest nadal zadaniem bardzo trudnym. Wymaga ono analizy nie tylko funkcji $\mu \mapsto h_\mu(T)$ (teorio-miarowej) entropii na tych miarach, ale trzeba też wiedzieć jak ta funkcja jest przybliżana funkcjami entropii względem rozbicia $\mu \mapsto h_\mu(\mathcal{P}_k, T)$, dla specjalnie dobranego ciągu rozbić mierzalnych $\mathcal{P}_k$. Istotny jest tu tak zwany *typ niejednostajności* dla zbieżności $h_\mu(\mathcal{P}_k, T) \to h_\mu(T)$ gdy $k \to \infty$. Aby wyjaśnić choćby pobieżnie szczegóły musimy zacząć od wprowadzenia pojęcia funkcji górnie półciągłych, oraz pewnych pojęć dla abstrakcyjnych rosnących ciągów funkcji nieujemnych. To zrobimy w kolejnym rozdziale. Następnie musimy zdefiniować strukturę entropijną jako taki właśnie ciąg na zbiorze miar niezmienniczych na X i zastosować wcześniej wprowadzone pojęcia do tej struktury. To będzie treścią ostatniego rozdziału.

3 Teoria superotoczek

W tym rozdziale litera X oznacza abstrakcyjny zbiór zwarty. W późniejszych zastosowaniach będzie nim zbiór $\mathcal{M}_T(X)$ miar niezmienniczych topologicznego układu dynamicznego. Punkty tego zbioru (w tym rozdziale oznaczane przez x) zastąpione zostaną później miarami niezmienniczymi (oznaczanymi przez μ).

Przypomnijmy, że funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest *górnie półciągła*, jeśli każdy zbiór postaci $\{x \in X : f(x) < t\}$ jest otwarty. Każda funkcja górnie półciągła na zbiorze zwartym jest ograniczona z góry. Klasa funkcji górnie półciągłych jest zamknięta na sumy skończone i infima.

Niech $\mathcal{F} = (f_k)$ będzie niemalejącym ciągiem funkcji nieujemnych na X, takich że $f_0 \equiv 0$ oraz różnica $f_k - f_{k-1}$ jest dla każdego $k \geqslant 1$ górnie półciągła. Wynika z tego w szczególności, że każda funkcja f_k jest górnie półciągła (nie jest to jednak warunek równoważny). Zakładamy też, że funkcje te są wspólnie ograniczone, zatem granica $f(x) = \lim_k f_k(x)$ jest funkcją ograniczoną. Na potrzeby tego artykułu ciąg taki nazwiemy *strukturą*.

Definicja 3.1. Superotoczką *struktury $\mathcal{F}$ nazwiemy dowolną funkcję E na X spełniającą*

- *$E \geqslant f_k$ dla każdego k (równoważnie $E \geqslant f$),*
- *różnica $E - f_k$ jest górnie półciągła dla każdego k.*

Dodatkowo za superotoczkę uznamy funkcję stale równą nieskończoności.

W szczególności mamy, że $E - f$ jest górnie półciągła (albo stale równa nieskończoności), ale nie jest to warunek równoważny. Łatwo zauważyć, że rodzina wszystkich superotoczek (a jest ona niepusta, gdyż zawiera funkcję stałą nieskończoność) jest zamknięta na infima. Zatem istnieje *minimalna superotoczka* struktury $\mathcal{F}$. Będziemy ją oznaczać przez $E\mathcal{F}$. W ogólnym przypadku superotoczki struktur mogą zachowywać się bardzo różnie. Dla niektórych struktur może nie istnieć superotoczka skończona (wtedy $E\mathcal{F} \equiv \infty$). W każdym innym przypadku $E\mathcal{F}$ jest nieujemną funkcją górnie półciągłą, a więc ograniczoną oraz jest ona równa funkcji granicznej f na zbiorze rezydualnym (czyli na gęstym zbiorze typu G_δ). Jednak różnica między supremami punktowymi funkcji f a $E\mathcal{F}$ nadal może być bardzo duża.

Podamy teraz metodę wyznaczania funkcji $E\mathcal{F}$ z zastosowaniem indukcji pozaskończonej. Przypomnijmy, że dla dowolnej funkcji g istnieje jej *górnie półciągła otoczka* oznaczana przez $\widetilde{g}$ zdefiniowana jako najmniejsza funkcja górnie półciągła większa równa od g. Znów przyjmując konwencję, że infimum rodziny pustej jest nieskończone, musimy przyjąć, że $\widetilde{g}$ dla funkcji g nieograniczonej z góry jest tożsamościowo równą nieskończoności.

Oznaczmy przez θ_k różnicę $f - f_k$ (nie jest to na ogół funkcja górnie półciągła). Następnie, dla liczb porządkowych $\alpha < \omega_1$ definiujemy ciąg pozaskończony funkcji u_α (zależny of struktury $\mathcal{F}$) w następujących krokach indukcyjnych:

- $u_0 \equiv 0$
- jeśli zdefiniowaliśmy u_β dla wszystkich $\beta < \alpha$ to kładziemy najpierw

  $$v_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} u_\beta,$$

  a następnie definiujemy

  $$u_\alpha = \lim_k \{\widetilde{v_\alpha + \theta_k}\}$$

(oczywiście, jest to granica ciągu malejącego). Nietrudno jest udowodnić (korzystając ze zwartości dziedziny X), że ciąg pozaskończony u_α rośnie tylko do pewnego indeksu przeliczalnego α_0, powyżej którego ciąg ten ustala się, tzn. dla każdego $\alpha > \alpha_0$ mamy $u_\alpha \equiv u_{\alpha_0}$. Najmniejszy taki indeks α_0 nazywa się *rzędem skupienia struktury* $\mathcal{F}$. Możliwe są dwa przypadki: Albo (1) funkcja v_α będzie dla pewnego α nieograniczona. Wtedy najmniejsze takie α będzie naszym indeksem α_0 i wszystkie funkcje u_α dla $\alpha \geqslant \alpha_0$ będą stale tożsamościowo równe nieskończoności, albo (2) wszystkie funkcje v_α będą ograniczone i wtedy ciąg u_α będzie (wspólnie) ograniczony, zatem funkcja u_{α_0} będzie ograniczona. Teraz możemy podać wzór na minimalną superotoczkę.

Twierdzenie 3.2.

$$E\mathcal{F} = f + u_{\alpha_0}.$$

Widzimy więc, że przypadek (1) odpowiada temu, że $E\mathcal{F} \equiv \infty$ (nie istnieje superotoczka skończona), a przypadek (2) odpwiada istnieniu (chociaż jednej) superotoczki skończonej (np. $E\mathcal{F}$), i wtedy – automatycznie – ograniczonej.

Wyróżnijmy jeszcze jeden ważny parametr, mianowicie liczbę

$$c^* = \sup\{u_1(x) : x \in X\}.$$

Nietrudno się przekonać, że następujące warunki są równoważne:

1. $c^* = 0$,
2. $u_1 \equiv 0$,
3. $u_{\alpha_0} \equiv 0$,
4. $E\mathcal{F} \equiv f$,
5. struktura (f_n) zbiega jednostajnie do granicy f.

Takie bardzo specjalne struktury odegrają ważną rolę w końcowej części naszego wywodu.

Musimy teraz wzbogacić nieco nasze rozważania zakładając, że dziedzina X jest zbiorem wypukłym w pewnej przestrzeni Banacha. Tak będzie w głównym zastosowaniu teorii superotoczek, gdyż tam dziedziną będzie (wypukły) zbiór miar niezmienniczych.

W takim przypadku będziemy rozważać *struktury afiniczne* $\mathcal{F}$, tzn. takie że wszystkie funkcje składowe f_k są *afiniczne* (czyli zachowują kombinacje wypukłe). Interesować nas wtedy będą również *superotoczki afiniczne*, czyli po prostu superotoczki E_{A}, które są funkcjami afinicznymi. Ta rodzina superotoczek nie jest już zamknięta na infima, nie ma więc (w przypadku ogólnym) czegoś takiego jak minimalna superotoczka afiniczna. Prawdziwe natomiast jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.3. *Jeśli $\mathcal{F}$ jest strukturą afiniczną na wypukłej dziedzinie X, to infimum punktowe wszystkich superotoczek afinicznych jest równe minimalnej superotoczce (dowolnej) $E\mathcal{F}$. Zapisując to wzorem mamy, dla każdego $x \in X$,*

$$\inf\{E_{\mathsf{A}}(x) : E_{\mathsf{A}} \text{ jest superotoczką afiniczną}\} = E\mathcal{F}(x).$$

W szczególności wynika z tego, że $E\mathcal{F}$ jest dla takiej struktury funkcją wklęsłą.

4 Struktury entropijne i twierdzenie o entropii rozszerzeniowej symbolicznej

W tym rozdziale podamy definicję struktury entropijnej jako specjalnie dobranej struktury afinicznej na zbiorze $\mathcal{M}_T(X)$ miar niezmienniczych dynamicznego układu topologicznego (X, T) i podamy wzór na funkcję entropii rozszerzeniowej symbolicznej wyrażony w języku superotoczek.

Definicja 4.1. *Rozbicie borelowskie $\mathcal{P}$ przestrzeni X ma* małe brzegi *jeśli miara sumy brzegów klatek tego rozbicia wynosi zero dla dowolnej miary $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$.*

Niestety, nie w każdym układzie topologicznym występują rozbicia o małych brzegach, jednak dokonując pewnych nieistotnych z punktu widzenia modyfikacji naszego układu (których omawianie pominiemy) można uzyskać istnienie takich rozbić. Mało tego, można znaleźć ciąg rozbić $\mathcal{P}_k$ o następujących własnościach: dla każdego $k \geqslant 1$

1. rozbicie $\mathcal{P}_k$ ma małe brzegi,
2. rozbicie $\mathcal{P}_{k+1}$ jest rozdrobnieniem rozbicia $\mathcal{P}_k$,
3. maksymalna średnica klatki rozbicia $\mathcal{P}_k$ nie przekracza 2^{-k}.

Mając taki ciąg rozbić możemy zdefiniować kluczowe pojęcie teorii entropii układów topologicznych, tzw. strukturę entropijną:

Definicja 4.2. *Niech (X,T) będzie topologicznym układem dynamicznym o skończonej entropii topologicznej.* Strukturą entropijną *tego układu nazwiemy ciąg funkcji $\mathcal{H} = (h_k)$, gdzie $h_k : \mathcal{M}_T(X) \to [0,\infty)$ jest określona wzorem*

$$h_k(\mu) = h_\mu(\mathcal{P}_k, T),$$

przy czym $(\mathcal{P}_k)$ jest ciągiem rozbić spełniającym powyższe własności 1.–3.

(W przypadku układu nie posiadającego ciągu rozbić o małych brzegach strukturę entropijną definiujemy trochę inaczej, jednak szczegóły takiej konstrukcji tutaj pominiemy. Struktura ta ma wtedy takie same, wyliczone poniżej, własności, jak struktura zbudowana w oparciu o rozbicia o małych brzegach.)

Z własności ogólnych entropii teorio-miarowej wynika, że funkcje h_k są nieujemne i afiniczne na $\mathcal{M}_T(X)$ oraz wspólnie ograniczone przez liczbę $\mathbf{h}_{\mathsf{top}}(X,T)$. Konsekwencją założeń o ciągu rozbić $(\mathcal{P}_k)$ są dalsze niezmiernie ważne własności struktury entropijnej: ciąg $\mathcal{H} = (h_k)$ jest niemalejący, jego granicą jest funkcja entropii h (zadana wzorem $h(\mu) = h_\mu(T)$) oraz, co najważniejsze, dla każdego $k \geqslant 1$ różnica $h_{k+1} - h_k$ jest górnie półciągła (przyjmując $h_0 \equiv 0$). A zatem $\mathcal{H}$ jest strukturą afiniczną na zbiorze $\mathcal{M}_T(X)$ i stosują się do niej wszystkie twierdzenia podane w rozdziale poprzednim, w szczególności wiemy, że $E\mathcal{H}$ jest równe infimum wszystkich superotoczek afinicznych E_{A}.

Możemy już teraz sformułować główne twierdzenie teorii rozszerzeń symbolicznych.

Twierdzenie 4.3 (Twierdzenie o entropii rozszerzeniowej symbolicznej)**.** *Niech (X,T) będzie topologicznym układem dynamicznym o skończonej entropii i niech $\mathcal{H}$ oznacza wybraną dla tego układu strukturę entropijną. Niech E oznacza funkcję rzeczywistą określoną na $\mathcal{M}_T(X)$. Następujące warunki są rónoważne:*

- *$E = E_{\mathsf{A}}$ jest superotoczką afiniczną struktury entropijnej $\mathcal{H}$,*
- *istnieje rozszerzenie symboliczne (Y,σ) układu (X,T) (wraz z odwzorowaniem faktorującym $\pi : Y \to X$), takie że na $\mathcal{M}_T(X)$ mamy równość funkcji E oraz h^π.*

Jako wnioski dostajemy następujące wzory:

- $h_{\mathsf{sex}}(\mu) = E\mathcal{H}(\mu)$, dla dowolnej $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$,
- $\mathbf{h}_{\mathsf{sex}}(X,T) = \sup\{E\mathcal{H}(\mu) : \mu \in \mathcal{M}_T(X)\}$,
- układ posiada rozszerzenie symboliczne wtedy i tylko wtedy gdy istnieje skończona superotoczka struktury entropijnej $\mathcal{H}$ (nie musimy w tym celu szukać superotoczki afinicznej).

W ten oto sposób udało się określić (wyliczyć) kluczowe parametry opisujące możliwość utworzenia rozszerzenia symbolicznego naszego układu. Ważne jest przy tym to, że parametry te wyliczamy na podstawie wewnętrznych własności układu. Jesteśmy na przykład w stanie, badając dany układ, zdecydować czy w ogóle posiada on rozszerzenie symboliczne (zanim podejmiemy jakiekolwiek próby utworzenia takowego).

Struktura entropijna pozwala scharakteryzować inną ważną klasę układów dynamicznych, tzw. układy *asymptotycznie h-ekspansywne*. Pojęcie to zostało wprowadzone przez M. Misiurewicza wraz z pewnym parametrem typu entropijnego, oznaczanego przez $\mathbf{h}^*(X,T)$, którego oryginalnej definicji nie będziemy jednak teraz przytaczać (zob. [18]). Asymptotyczna h-ekspansywność jest zdefiniowana jako warunek $\mathbf{h}^*(X,T) = 0$. Choć w pełnej ogólności nie ma żadnej bezpośredniej nierówności pomiędzy entropią topologiczną $\mathbf{h}_{\mathsf{top}}(X,T)$ a parametrem Misiurewicza $\mathbf{h}^*(X,T)$, to jednak zachodzi implikacja

$$h_{\mathsf{top}}(X,T) = 0 \implies \mathbf{h}^*(X,T) = 0$$

(czyli układy o entropii topologicznej zero są asymptotycznie h-ekspansywne). Okazuje się, że parametr Misiurewicza i pojęcie asymptotycznej h-ekspansywności zależą wprost od struktury entropijnej i jej parametrów:

Twierdzenie 4.4. *Dla topologicznego układu dynamicznego (X,T) zachodzi równość*

$$\mathbf{h}^*(X,T) = c^*,$$

gdzie c^* jest wyliczone (jako supremum funkcji u_1) dla struktury entropijnej $\mathcal{H}$.

W szczególności wynikają stąd kolejne charakteryzacje układów asymptotycznie h-ekspansywnych, tym razem wyrażone w języku struktur entropijnych i rozszerzeń symbolicznych:

Twierdzenie 4.5. *Następujące warunki są równoważne*

1. *Układ (X,T) jest asymptotycznie h-ekspansywny,*
2. *struktura entropijna zbiega* jednostajnie *do funkcji entropii,*
3. *$h_{\mathsf{sex}}(\mu) = h_\mu(T)$ dla każdej miary niezmienniczej μ na X,*
4. *układ (X,T) posiada rozszerzenie symboliczne zachowujące entropię, tzn. takie że $h^\pi \equiv 0$.*

5 Rozszerzenia symboliczne gładkich odwzorowań odcinka

Spektakularnym przykładem ważnej klasy układów dynamicznych, w której dzięki teorii struktur entropijnych udaje się bardzo szczegółowo określić wartość entropii rozszerzeniowej (przed podjęciem budowy jakichkolwiek rozszerzeń symbolicznych) jest klasa gładkich odwzorowań odcinka (lub okręgu). Są to bardzo elementarne przekształcenia, dlatego są, można powiedzieć, przebadane na wszelkie możliwe sposoby. A jednak o tym, czy posiadają one rozszerzenia symboliczne, do niedawna nie było zupełnie wiadomo.

Niech $I = [0, 1]$ będzie naszym modelowym odcinkiem. Powiemy teraz, co rozumiemy przez „klasę gładkości" przekształcenia $T : I \to I$.

Definicja 5.1. *Dla $r \in (0, 1]$ powiemy, że T jest klasy C^r jeśli T jest* hölderowsko ciągłe *z parametrem r, tzn. spełnia, dla dowolnych $x, y \in I$, warunek*

$$|T(x) - T(y)| \leqslant |x - y|^r.$$

Dla $r > 1$ żądamy indukcyjnie, aby T było różniczkowalne i jego pochodna T' była klasy C^{r-1}.

Nietrudno zauważyć, $r_1 < r_2$ pociąga $C^{r_1} \supset C^{r_2}$, że funkcje różniczkowalne n razy z ciągłą n-tą pochodną są klasy C^n, oraz że klasa C^∞ składa się z funkcji różniczkowalnych nieskończenie wiele razy.

Dla funkcji T różniczkowalnej o ciągłej pochodnej definiujemy również inne parametry liczbowe. Pierwszy z nich to

$$L(T) = \sup\{\log |T'(x)| : x \in I\}.$$

Liczba ta pokrywa się z logarytmem *stałej Lipshitza* dla funkcji T. Natępnie określamy liczbę

$$R(T) = \max\left\{0, \lim_n \tfrac{1}{n} L(T^n)\right\},$$

gdzie T^n oznacza n-tą iterację (a nie potęgę) T, $T^n = T \circ T \circ \cdots \circ T$ (n razy). Ten parametr nazwiemy *stałą ekspansywności.* Dalej, dla miary ergodycznej μ na I liczbę

$$\chi_0(\mu) = \max\left\{0, \int \log |T'(x)|\, d\mu(x)\right\}$$

nazywamy *wykładnikiem Lapunowa* miary μ. Zarówno stała ekspansywności, jak i wykładniki Lapunowa są pojęciami bardzo dobrze znanymi w teorii ergodycznej układów gładkich. Podstawowe nierówności dotyczące entropii przekształceń odcinka mówią, że

- dla dowolnej miary ergodycznej μ mamy $h_\mu(T) \leqslant \chi_0(\mu)$ oraz
- $\mathbf{h}_{\mathsf{top}}(I, T) \leqslant R(T)$.

(obie wynikają z tzw. *nierówności Margulisa–Ruelle*, zob. [21]).

Teoria struktur entropijnych pozwala podobnie wyrazić (oszacować z góry) entropię rozszerzeniową symboliczną i to jest w pewnym sensie fakt kulminacyjny tej teorii.

Twierdzenie 5.2 (Twierdzenie Antarktyczne)**.** *Niech T będzie odwzorowaniem odcinka klasy C^r gdzie $r > 1$. Wtedy*

- *dla dowolnej miary ergodycznej μ mamy $h_{\mathsf{sex}}(\mu) \leqslant h_\mu(T) + \frac{\chi_0(\mu)}{r-1}$ oraz*
- $\mathbf{h}_{\mathsf{sex}}(I,T) \leqslant \mathbf{h}_{\mathsf{top}}(I,T) + \frac{R(T)}{r-1}$.

W dowodzie wykazuje się tak naprawdę coś dużo bardziej konkretnego. Mianowicie pokazuje się, że funkcja $\frac{\chi_0(\mu)}{r-1}$ (po przedłużeniu afinicznym na wszystkie miary niezmiennicze, nie tylko ergodyczne) jest afiniczną superotoczką struktury entropijnej, co oznacza, że istnieje rozszerzenie symboliczne (Y,σ) (wraz z odwzorowaniem faktorującym $\pi : Y \to I$) takie, że dla miar ergodycznych μ mamy równość

$$h^\pi(\mu) = \frac{\chi_0(\mu)}{r-1}.$$

Jednym z ważnych wniosków z powyższego twierdzenia jest fakt, że jeśli odwzorowanie T jest klasy C^∞, to istnieje rozszerzenie symboliczne *zachowujące entropię miar*, tzn. takie że $h^\pi \equiv 0$. Oznacza to, że potrafimy zapisać nasz układ (I,T) w postaci cyfrowej nie tylko bezstratnie ale również bez zbędnej zawartości informacyjnej. Przypomina to nieco sytuację z podejścia teorio-miarowego, gdzie endomorfizm o entropii skończonej potrafiliśmy zapisać cyfrowo poprzez rozszerzenie symboliczne izomorficzne z rozszerzeniem naturalnym (o tej samej entropii). Innym wnioskiem jest to, że układy klasy C^∞ są asymptotycznie h-ekspansywne, co samo w sobie jest faktem niezwykle interesującym (choć nie wyrażonym w języku rozszerzeń symbolicznych). Fakt ten prawdziwy jest nie tylko w przypadku odwzorowań odcinka, ale dla dowolnych przekształceń (klasy C^∞) zwartych rozmaitości riemannowskich.

Zauważmy też, że dla $r = 1$ powyższe oszacowania dają wartości nieskończone. Faktycznie, znane są przykłady układów klasy C^1, które nie posiadają rozszerzeń symbolicznych.

Dalsze szczegóły dotyczące teorii rozszerzeń symbolicznych i struktur entropijnych wykraczają poza ramy tego artykułu. Czytelnik znajdzie je w oryginalnych pracach poświęconych tej teorii oraz w książce, zgodnie z listą przytoczoną na końcu rozdziału wstępnego.

6 Kilka faktów z historii badań

Pierwszy wynik dotyczący istnienia rozszerzeń symbolicznych należy do Williama Reddy'ego (rok 1968, [20]). Mówi on, że każdy homeomorfizm ekspansywny przestrzeni zwartej posiada takowe rozszerzenie. Dowód nie podaje jednak żadnych oszacowań na entropię.

Wkrótce stało się oczywiste, że założenie o ekspansywności jest dużo za mocne. Na przykład wiadomo było, że układy hiperboliczne na rozmaitościach (które ekspansywne nie są) posiadają tzw. rozbicia markowskie dzięki którym można je rozszerzyć do układów symbolicznych typu skończonego. Pozwoliło to stosować metody dynamiki symbolicznej do badania układów hiperbolicznych. To klasyczne podejście można znaleźć na przykład w książce Bowena z 1974 r. (zob. [1]).

Jednak w przypadku ogólnym na temat rozszerzeń symbolicznych wiedziano bardzo niewiele. Oczywistym warunkiem koniecznym do istnienia rozszerzeń symbolicznych jest skończona entropia topologiczna, jednak czy jest to warunek wystarczający – to pytanie musiało nurtować badaczy w latach 70-tych i 80-tych. Około roku 1990 J. Auslander zapytał o to Mike'a Boyle'a, jednego z wiodących specjalistów z dziedziny dynamiki symbolicznej. W przeciągu roku Boyle uzyskał odpowiedź negatywną podając przykład układu o skończonej entropii bez rozszerzeń symbolicznych. Skonstruował on też układ o dodatniej entropii topologicznej h posiadający co prawda rozszerzenia symboliczne, ale każde z nich miało entropię co najmniej $2h$. Oba przykłady uzyskano poprzez odpowiednie rozmieszczenie punktów okresowych a następnie zastępowanie tych punktów przez maleńkie układziki o dodatniej entropii. Odkrytą w ten sposób różnicę pomiędzy skończoną entropią topologiczną układu a infimum (być może nieskończonym) entropii topologicznych rozszerzeń symbolicznych Boyle nazwał *entropią rezydualną* (wg oznaczeń podanych w poprzednich rozdziałach będzie to róznica $\mathbf{h}_{\mathsf{sex}}(X,T) - \mathbf{h}_{\mathsf{top}}(X,T)$). Powyższe przykłady były prezentowane na konferencji w 1991 r., jednak nie zostały opublikowane aż do roku 2002. Pokazały one przede wszystkim jedną rzecz: nie ma łatwej odpowiedzi na pytanie o istnienie i entropię rozszerzeń symbolicznych.

Przez kolejne 8 lat postęp w tej dziedzinie był bardzo ograniczony i niepublikowany. Mike Boyle współpracował z Doris i Ulfem Fiebiegami. Próbowali oni konstruować rozszerzenia symboliczne metodami czystej dynamiki topologicznej (bez użycia miar niezmienniczych), co z dzisiejszej perspektywy czyni jasnym, dlaczego nie osiągali oni istotnych wyników.

W roku 1998 natknąłem się na ten sam problem (badając zupełnie inne zagadnienie). Wtedy też dowiedziałem się jak niewiele na ten temat wiadomo. Mike Boyle potrafił jednak już wtedy podać informację, że każdy układ o entropii topologicznej zero posiada rozszerzenie symboliczne. To chwilowo wystarczyło na moje ówczesne potrzeby, ale pojawiło się nowe wyzwanie na przyszłość.

W roku 1999 spędziłem miesiąc w Marsylii i całą swą energię skupiłem na zastanawianiu się dlaczego jedne układy (o skończonej entropii) mają rozszerzenia symboliczne, a inne nie. Uznałem, że najłatwiej będzie przyglądać się układom zero-wymiarowym. W wyniku analizy przykładów Boyle'a udało mi się ustalić, że kluczową rolę odgrywają tu miary niezmiennicze i ich entropia. Udało mi się uzyskać pierwszy ogólny wzór na topologiczną entropię rozszerzeniową symboliczną dla dowolnych układów zero-wymiarowych. We wzorze pojawiły się funkcje entropii na miarach niezmienniczych podobne do tych, jakie później określone zostały mianem struktury entropijnej. Między innymi ze wzoru tego wynikało, że każdy układ zero-wymiarowy asymptotycznie h-ekspansywny posiada rozszerzenie symboliczne o tej samej entropii topologicznej. Rezultaty te zostały opublikowane w roku 2001 w pracy [10].

Rok później Mike Boyle opublikował wyniki swojej długoletniej współpracy z Fiebiegami (praca [3]). Pojawiają się tam wcześniej wspomniane pionierskie przykłady, pojawia się wynik mówiący, że dowolny (już nie tylko zero-wymiarowy) układ asymptotycznie h-ekspansywny posiada rozszerzenie symboliczne zachowujące entropię miar niezmienniczych (a nie tylko entropię topologiczną). Ponieważ każdy układ ekspansywny jest asymptotycznie h-ekspansywny wynik ten znacznie wzmacnia pierwszy w tej dziedzinie wynik Reddy'ego. Podobnie, ponieważ każdy układ o entropii topologicznej zero jest asymptotycznie h-ekspansywny, odkrywamy tu fakt podany mi przez Boyle'a w roku 1998. W pracy [3] znajdujemy też inny, spektakularny i jeden z do dziś najczęściej cytowanych wniosków z twierdzenia o układach asymptotycznie h-ekspansywnych. Niewiele wcześniej Jerôme Buzzi udowodnił właśnie, że dowolne przekształcenie rozmaitości riemannowskiej klasy C^∞ jest asymptotycznie h-ekspansywne (zob. [8]). A zatem w pracy [3] można było sformułować wniosek, że każde takie przekształcenie posiada rozszerzenie symboliczne zachowujące entropię miar. Tak więc układy klasy C^∞ można zapisywać w formie cyfrowej nie tylko bezstratnie ale też bez zbędnej zawartości informacyjnej. To bardzo ważkie odkrycie, zwłaszcza, że dotyczy dobrze zbadanej i popularnej klasy układów. Powstaje jednak natychmiast pytanie: co z przekształceniami klasy C^r dla r skończonych?

W roku 2001 miałem przyjemność odwiedzić Mike'a Boyle'a i współpracować z nim przez pół roku. W wyniku tej współpracy powstała kluczowa w omawianej dziedzinie praca [2], w której podaliśmy już kompletną i w pełni ogólną charakteryzację funkcji h_{sex} na miarach. Podano tu również zasadę wariacyjną dla entropii rozszerzeniowej symbolicznej. Tym samym udzielono kompletnej odpowiedzi na pytania przytoczone na końcu wstępu niniejszego artykułu. Rozwiązanie to nadal odwołuje się pośrednio do układów zero-wymiarowych. Jest to możliwe dzięki wynikom Lindenstraussa i Weissa (zob. [15] i [16]), z których wynika, że każdy układ o skończonej entropii jest w sensie entropii równoważny pewnemu swojemu rozszerzeniu zero-wymiarowemu. Wprowadzono też pojęcie struktury entropijnej, jednak tylko dla układów zero-wymiarowych. Podano kryterium na to, kiedy funkcja h_{sex} (zdefiniowana jako infimum funkcji h^π) jest *osiągana*, to znaczy równa funkcji h^π dla pewnego rozszerzenia symbolicznego.

Kolejne pół roku spędziłem współpracując z Sheldonem Newhousem, wybitnym specjalistą od dynamiki przekształceń gładkich na rozmaitościach. Newhouse żywo zainteresował się tematyką rozszerzeń symbolicznych, która zresztą była mu w pewnym sensie bliska od wielu lat; miał on na swym koncie wynik (zob. [19]) równoważny wynikowi J. Buzziego o asymptotycznej h-ekspansywności układów klasy C^∞ (tyle że równoważność ta nie była wtedy uświadomiona – stała się ona jasna dopiero po wprowadzeniu struktur entropijnych). W wyniku współpracy powstał artykuł [13] zawierający wyniki natury negatywnej: w pewnej rodzinie przekształceń rozmaitości wymiaru co najmniej 2 typowe przekształcenie klasy C^1 nie posiada rozszerzeń symbolicznych, a typowe przekształcenie klasy C^r, gdzie $1 < r < \infty$, nie posiada rozszerzenia symbolicznego zachowującego entropię miar. Formułujemy tam hipotezę podając prawdopodobne naszym zdaniem górne ograniczenie na $\mathbf{h}_{\mathsf{sex}}$ dla odwzorowań klasy C^r. Hipoteza ta pociągnęła całą serię późniejszych badań i wyników. Będziemy ją roboczo nazywać hipotezą DN.

W tym samym mniej więcej czasie powstaje praca [11], w której rozwinięta jest teoria struktur entropijnych w ogólnych układach topologicznych. Pozwala to znacznie uprościć rozumowania dotyczące m.in. układów na rozmaitościach, można bowiem pominąć odwoływanie się do pośredniego rozszerzenia zero-wymiarowego. Teoria struktur entropijnych, choć stworzona głównie jako narzędzie do badania rozszerzeń symbolicznych, zyskuje niezależne zainteresowanie i powstaje kilka prac poświęconych wyłącznie temu obiektowi (zob. [7], [17]).

W roku 2005, we współpracy z Alejandrem Maassem udało mi się poczynić drobny acz istotny krok naprzód w kierunku udowodnienia hipotezy DN: została ona udowodniona dla rozmaitości wymiaru 1 (czyli dla odwzorowań odcinka i okręgu). Główna trudność w dowodzie została przełamana w niecodziennych okolicznościach – podczas mojej podróży na... Antarktydę. Dlatego kluczowy lemat w dowodzie nazwaliśmy "twierdzeniem antarktycznym". Jednak nasze możliwości rozumienia układów gładkich kończyły się na wymiarze 1. Dalej pałeczkę przejęli młodsi matematycy. Najpierw David Burguet wykazał, że oszacowanie dane przez udowodnioną hipotezę DN dla odwzorowań odcinka jest optymalne (zob. [4]). Następnie korzystając z odpowiedniego uogólnienia twierdzenia antarktycznego udowadniał on hipotezę DN w serii prac o wzrastającej ogólności, ostatecznie kończąc na dowolnych odwzorowaniach klasy C^r na powierzchniach [5], [6]. Jest to ogromny krok naprzód, choć pytanie w wyższych wymiarach nadal pozostaje otwarte.

Na zakończenie wspomnę jeszcze jeden interesujący wynik dotyczący układów ogólnych. Niedawno Jacek Serafin wykazał, że w przypadku układu zero-wymiarowego bez punktów okresowych konstrukcję z pracy [2] można udoskonalić, tak aby powstałe rozszerzenie symboliczne było „wierne", tzn., aby każda miara niezmiennicza miała tylko jeden przeciwobraz w rozszerzeniu symbolicznym (zob. [22]). Łącząc to z wynikiem Dawida Huczka (zob. [14]) o rozszerzeniach zero-wymiarowych można w twierdzeniu Serafina pozbyć się założeń o zero-wymiarowości i braku punktów okresowych. Rozszerzenia wierne są o tyle ważne, że eliminują zbędną zawartość informacyjną niesioną przez „dodatkowe" miary niezmiennicze w przeciwobrazie, co może mieć znaczenie w kontekście poszukiwania optymalnych rozszerzeń symbolicznych.

Na tym zakończymy ten pobieżny przegląd. Dziedzina badań nadal się rozwija i grono matematyków zajmujących się nią wciąż się poszerza, o czym mogę się przekonać otrzymując stosunkowo często do recenzji prace nadsyłane do różnych czasopism z coraz to nowych ośrodków badawczych.

Opracowano na bazie wykładu
wygłoszonego na Uniwersytecie Chilijskim
Santiago, 2008

Literatura

[1] Bowen, R. (2008). *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, 2nd revised. Lect. Notes Math. **470**. Springer, Berlin.

[2] Boyle, M. and Downarowicz, T. (2004). The entropy theory of symbolic extensions. *Invent. Math.* **156**, no. 1, 119–161.

[3] Boyle, M., Fiebig, D. and Fiebig, U. (2002). Residual entropy, conditional entropy and subshift covers. *Forum Math.* **14**, no. 5, 713–757.

[4] Burguet, D. (2010). Examples of C^r interval map with large symbolic extension entropy. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - A* **26**, 873–899.

[5] Burguet, D. (2011). C^2 surface diffeomorphisms have symbolic extensions. *Inventiones Mathematicae* **186** 191–236.

[6] Burguet, D. Symbolic extensions in intermediate smoothness on surfaces. *Preprint*.

[7] Burguet, D. and McGoff, K. (2012). Orders of accumulation of entropy. *Fundamenta Math.* **216** 1–53.

[8] Buzzi, J. (1997). Intrinsic ergodicity of smooth interval maps. *Israel J. Math.* **100** 125–161.

[9] Downarowicz, T. (2011). *Entropy in dynamical systems*. Cambridge University Press, New Mathematical Monographs 18.

[10] Downarowicz, T. (2001). Entropy of a symbolic extension of a dynamical system. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **21**, no. 4, 1051–1070.

[11] Downarowicz, T. (2005). Entropy structure. *J. Anal. Math.* **96** 57–116.

[12] Downarowicz, T. and Maass, A. (2009). Smooth interval maps have symbolic extensions: the Antarctic theorem. *Invent. Math.* **176**, no. 3, 617–636.

[13] Downarowicz, T. and Newhouse, S. (2005). Symbolic extensions and smooth dynamical systems. *Invent. Math.* **160**, no. 3, 453–499.

[14] Downarowicz, T. and Huczek, D. Faithful zero-dimensional principal extensions. *Preprint*.

[15] Lindenstrauss, E. (1999). Mean dimension, small entropy factors and an imbedding theorem. *Publ. Math. I.H.E.S.* **89** 227–262.

[16] Lindenstrauss, E. and Weiss, B. (2000). Mean topological dimension. *Israel J. Math.* **115** 1–24.

[17] McGoff, K. (2011). Orders of accumulation of entropy on manifolds. *J. Anal. Math.* **114** 157–206

[18] Misiurewicz, M. (1976). Topological conditional entropy. *Studia Math.* **55**, no. 2, 175–200.

[19] Newhouse, S. (1990). Continuity properties of entropy. *Ann. Math.* **129** 215–235. *Corr. in* **131** 409–410 (1990).

[20] Reddy, W. L. (1968). Lifting expansive homeomorphisms to symbolic flows. *Math. Systems Theory* **2**, 91–92.

[21] Ruelle, D. (1978). An inequality for the entropy of differentiable maps. *Bol. Soc. Brasil. Mat.* **9**, no. 1, 83–87.

[22] Serafin, J. (2012). A faithful symbolic extension. *Commun. Pure and Applied Anal.* **11**, 1051–1062.

Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Wrocławska
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
e-mail: downar@pwr.wroc.pl